

Langages rationnels et prédicats numériques arbitraires

Nathanaël Fijalkow, Charles Paperman

FREC Bordeaux Juin 2012

Problématique

Alphabet : $A = \{a, b\}$

$$\varphi_1 \equiv \exists x \exists y (a(x) \wedge a(y) \wedge 2y = x)$$

Problématique

Alphabet : $A = \{a, b\}$

$$\varphi_1 \equiv \exists x \exists y (a(x) \wedge a(y) \wedge 2y = x)$$

L'énoncé φ_1 définit le langage:

$$L(\varphi_1) = \{a\} \cup \bigcup_{1 \leq n} A^n a A^{n-1} a A^* \notin \text{Rat}(A^*)$$

Problématique

Alphabet : $A = \{a, b\}$

$$\varphi_1 \equiv \exists x \exists y (a(x) \wedge a(y) \wedge 2y = x)$$

L'énoncé φ_1 définit le langage:

$$L(\varphi_1) = \{a\} \cup \bigcup_{1 \leq n} A^n a A^{n-1} a A^* \notin \text{Rat}(A^*)$$

Le prédicat $\times 2$ est *non régulier*.

*Quels langages réguliers pouvons-nous définir dans **FO** à l'aide de prédicats numériques non régulier?*

Quels langages réguliers pouvons-nous définir dans **FO** à l'aide de prédicats numériques non régulier?

Le prédicat $\times 2$ est non régulier mais peut définir des langages réguliers.

$$\varphi_2 \equiv \forall x \exists y (a(x) \rightarrow 2y = x)$$

L'énoncé φ_2 définit le langage

$$L(\varphi_2) = (Ab)^*(1 + A) \in \text{Rat}(A^*)$$

*Quels langages réguliers pouvons-nous définir dans **FO** à l'aide de prédicats numériques non régulier?*

Le prédicat $\times 2$ est non régulier mais peut définir des langages réguliers.

$$\varphi_2 \equiv \forall x \exists y (a(x) \rightarrow 2y = x)$$

L'énoncé φ_2 définit le langage

$$L(\varphi_2) = (Ab)^*(1 + A) \in \text{Rat}(A^*)$$

Peut-on remplacer le prédicat $\times 2$ par un prédicat régulier?

*Quels langages réguliers pouvons-nous définir dans **FO** à l'aide de prédicats numériques non régulier?*

Le prédicat $\times 2$ est non régulier mais peut définir des langages réguliers.

$$\varphi_2 \equiv \forall x \exists y (a(x) \rightarrow 2y = x)$$

L'énoncé φ_2 définit le langage

$$L(\varphi_2) = (Ab)^*(1 + A) \in \text{Rat}(A^*)$$

Peut-on remplacer le prédicat $\times 2$ par un prédicat régulier?

$$\varphi_2 \equiv \forall x \exists y (a(x) \rightarrow x \equiv 0 \pmod{2})$$

Langages rationnels et prédicats numériques arbitraires

1. Introduction
2. Fragments de **MSO** et prédicats numériques arbitraires
3. Le cas monadique
 - 3.1 Détour par les mots infinis.
 - 3.2 Le théorème de Büchi
 - 3.3 Prédicats monadiques et mots infinis
4. Conclusion

Notation

- ▶ Une formule de $\mathbf{FO}[\mathcal{P}](A^*)$ est construite à partir de:

$$\forall x \mid \exists x \mid \neg \mid \wedge \mid \vee \mid a(x) \mid P(\vec{x}) \text{ pour } P \in \mathcal{P}$$

- ▶ Par exemple, les énoncés φ_1 et φ_2 sont dans $\mathbf{FO}[\times 2](A^*)$

Notation

- ▶ Une formule de $\mathbf{FO}[\mathcal{P}](A^*)$ est construite à partir de:

$$\forall x \mid \exists x \mid \neg \mid \wedge \mid \vee \mid a(x) \mid P(\vec{x}) \text{ pour } P \in \mathcal{P}$$

- ▶ Par exemple, les énoncés φ_1 et φ_2 sont dans $\mathbf{FO}[\times 2](A^*)$

- ▶ Une formule de $\mathbf{MSO}[\mathcal{P}](A^*)$ est construite à partir de:

$$\forall X \mid \exists X \mid \forall x \mid \exists x \mid x \in X \mid \neg \mid \wedge \mid \vee \mid a(x) \mid P(\vec{x}) \text{ pour } P \in \mathcal{P}$$

Notation

- ▶ Une formule de $\mathbf{FO}[\mathcal{P}](A^*)$ est construite à partir de:

$$\forall x \mid \exists x \mid \neg \mid \wedge \mid \vee \mid a(x) \mid P(\vec{x}) \text{ pour } P \in \mathcal{P}$$

- ▶ Par exemple, les énoncés φ_1 et φ_2 sont dans $\mathbf{FO}[\times 2](A^*)$

- ▶ Une formule de $\mathbf{MSO}[\mathcal{P}](A^*)$ est construite à partir de:

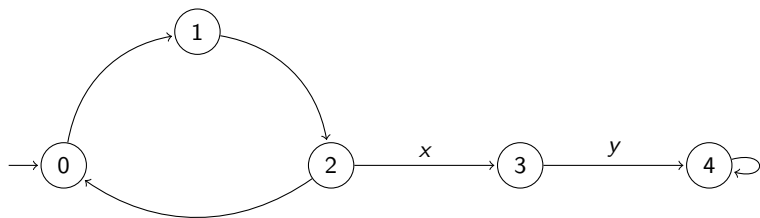
$$\forall X \mid \exists X \mid \forall x \mid \exists x \mid x \in X \mid \neg \mid \wedge \mid \vee \mid a(x) \mid P(\vec{x}) \text{ pour } P \in \mathcal{P}$$

- ▶ Un mot est une structure de la forme:

$$baaba = (\{0, \dots, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{0, 3\}, \mathcal{P}).$$

Prédicats réguliers

Le prédicat $x \equiv 2 \pmod{3} \wedge y = x + 1$ est régulier.



Dans la suite on note **REG**, la classe des prédicats réguliers.

Prédicats réguliers

Proposition

La classe **REG** est l'algèbre booléenne engendrée par les prédicats:
 $x < y$, $x = y + k$, $x = 0$ et $x \equiv r \pmod{q}$.

Prédicats réguliers

Proposition

La classe **REG** est l'algèbre booléenne engendrée par les prédicats:
 $x < y$, $x = y + k$, $x = 0$ et $x \equiv r \pmod q$.

Théorème (Straubing, Péladeau)

La classe des prédicats réguliers est la classe maximale tel que les formules de **FO[REG]** ne définissent que des langages réguliers.

FO[REG]

Théorème (Straubing)

Les langages définis par une formule de **FO[REG]** sont exactement les langages *quasi-apériodiques*.

FO[REG]

Théorème (Straubing)

Les langages définis par une formule de **FO[REG]** sont exactement les langages *quasi-apériodiques*.

Exemples

$L = (A^2)^*$ est défini par la formule

$\exists x \forall y (y \leq x \wedge x \equiv 0 \pmod{2})$
donc dans **FO[REG]**

On peut montrer que

$L = \{u \text{ tel que } |u|_a \equiv 0 \pmod{2}\}$
n'est pas dans **FO[REG]**.

Prédicats numériques arbitraires

On note \mathcal{N} la classe de tous les prédicats numériques.

Remarque

La classe $\mathbf{FO}[\mathcal{N}]$ est très expressive. Il existe des langages de complexité *arbitraire* qui appartiennent à cette classe.

Prédicats numériques arbitraires

On note \mathcal{N} la classe de tous les prédicats numériques.

Remarque

La classe $\mathbf{FO}[\mathcal{N}]$ est très expressive. Il existe des langages de complexité *arbitraire* qui appartiennent à cette classe.

Le langage $L = \{u \text{ tel que } |u|_a \equiv 0 \pmod{2}\}$ est-il définissable dans $\mathbf{FO}[\mathcal{N}]$?

Prédicats numériques arbitraires

Théorème (Barrington et Al.)

$$\mathbf{FO}[\mathcal{N}] \cap \mathit{Rat} = \mathbf{FO}[\mathbf{REG}]$$

Prédicats numériques arbitraires

Théorème (Barrington et Al.)

$$\mathbf{FO}[\mathcal{N}] \cap \mathit{Rat} = \mathbf{FO}[\mathbf{REG}]$$

A propos de la preuve

Repose sur:

- ▶ $AC^0 \leftrightarrow \mathbf{FO}[\mathcal{N}]$
- ▶ Une borne inférieure de complexité de familles de circuits booléens.

Prédicats numériques arbitraires

Théorème (Barrington et Al.)

$$\mathbf{FO}[\mathcal{N}] \cap \mathit{Rat} = \mathbf{FO}[\mathbf{REG}]$$

A propos de la preuve

Repose sur:

- ▶ $AC^0 \leftrightarrow \mathbf{FO}[\mathcal{N}]$
- ▶ Une borne inférieure de complexité de familles de circuits booléens.

Conjecture (Straubing)

$$\mathbf{FO} + \mathbf{MOD}(p)[\mathcal{N}] \cap \mathit{Rat} = \mathbf{FO} + \mathbf{MOD}(p)[\mathbf{REG}]$$

Problématiques

On se donne une formule de φ de **FO** $[\mathcal{N}]$ ou plus généralement de **MSO** $[\mathcal{N}]$ qui définit un langage régulier.

- ▶ Peut-on substituer les prédicats arbitraires par des prédicats réguliers?

Problématiques

On se donne une formule de φ de **FO** $[\mathcal{N}]$ ou plus généralement de **MSO** $[\mathcal{N}]$ qui définit un langage régulier.

- ▶ Peut-on substituer les prédicats arbitraires par des prédicats réguliers?
- ▶ Ces prédicats réguliers sont-ils effectivement constructibles?

Le cas monadique

- ▶ On note \mathcal{N}_1 la classe des prédicats arbitraires monadiques.
- ▶ On note **REG**₁ la classe des prédicats réguliers monadiques.

Remarque

Les énoncés de **MSO**[$\mathcal{N}_1, <$] peuvent être vu comme des formules $\varphi(\vec{P})$ où $\vec{P} \in \mathcal{N}_1^k$ et $\varphi(\vec{X}) \in \mathbf{MSO}[<]$.

Le cas monadique

On se donne $\varphi(\vec{X}) \in \mathbf{MSO}[<]$ et \vec{P} des prédicats monadiques.

Théorème

Si $\varphi(\vec{P})$ définit un langage régulier, alors il existe $\vec{R} \in \mathbf{REG}_1^k$ des prédicats réguliers tel que $L(\varphi(\vec{P})) \equiv L(\varphi(\vec{R}))$.

Preuve: Incursion dans les mots infinis

- ▶ Un mot $u \in A^\omega$ est une structure de la forme (\mathbb{N}, X_a, X_b) .
- ▶ Par exemple: le mot $(ab)^\omega = (\mathbb{N}, 2\mathbb{N}, 2\mathbb{N} + 1)$.

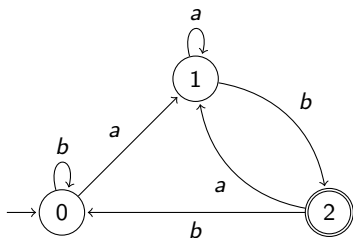
On peut définir de même que pour les mots finis **FO** $[\mathcal{P}](A^\omega)$ et **MSO** $[\mathcal{P}](A^\omega)$.

Automate de Büchi et langages ω -réguliers

Un langage est ω -régulier s'il est reconnu par un automate de Büchi.

Exemple

Le langage des mots infinis qui contiennent un nombre infini de facteurs ab est reconnu par:



Langages ω -réguliers

Proposition

Un langage ω -régulier non vide contient un mot ultimement périodique.

Langages ω -réguliers

Proposition

Un langage ω -régulier non vide contient un mot ultimement périodique.

Théorème (Büchi)

Les langages ω -réguliers sont exactement ceux définissables dans **MSO**[<](A^ω).

Preuve du théorème

Théorème

Si $\varphi(\vec{P})$ définit un langage régulier, alors il existe R_1, \dots, R_n des prédicats réguliers tel que $L(\varphi(\vec{P})) = L(\varphi(\vec{R}))$.

Soit Q un prédicat monadique. On note \overline{Q} le mot de $\{0, 1\}^\omega$ qui lui est associé.

$$L = \{(\overline{Q}_1, \dots, \overline{Q}_n) \mid L(\varphi(\vec{Q})) \equiv L(\varphi(\vec{P}))\}$$

Lemme

Le langage L est ω -régulier.

Généralisation ... impossible

Proposition

$\mathbf{FO}[REG](A^\omega) \not\subseteq \mathbf{MSO}[<](A^\omega)$

Généralisation ... impossible

Proposition

$\mathbf{FO}[REG](A^\omega) \not\subseteq \mathbf{MSO}[<](A^\omega)$

Proposition

$\mathbf{MSO}[<](A^\omega) \not\subseteq \mathbf{FO}[\mathbf{BIT}, <](A^\omega)$.

Généralisation ... impossible

Proposition

$\mathbf{FO}[REG](A^\omega) \subsetneq \mathbf{MSO}[<](A^\omega)$

Proposition

$\mathbf{MSO}[<](A^\omega) \subsetneq \mathbf{FO}[BIT, <](A^\omega)$.

Corollaire

$\mathbf{FO}[REG](A^\omega) \subsetneq \mathbf{FO}[M](A^\omega) \cap Rat$

Conclusion

- ▶ Dans le cas monadique:
 - ▶ Nous savons substituer les prédicats non réguliers.
 - ▶ Ces prédicats sont effectivement constructibles.
 - ▶ Ce type de preuve ne s'étend pas au cas non monadique.

Conclusion

- ▶ Dans le cas monadique:
 - ▶ Nous savons substituer les prédicats non réguliers.
 - ▶ Ces prédicats sont effectivement constructibles.
 - ▶ Ce type de preuve ne s'étend pas au cas non monadique.
- ▶ Actuellement nous étudions le cas des formules ne possédant qu'une seule occurrence d'un prédicat non régulier.

Conclusion

- ▶ Dans le cas monadique:
 - ▶ Nous savons substituer les prédicats non réguliers.
 - ▶ Ces prédicats sont effectivement constructibles.
 - ▶ Ce type de preuve ne s'étend pas au cas non monadique.
- ▶ Actuellement nous étudions le cas des formules ne possédant qu'une seule occurrence d'un prédicat non régulier.
- ▶ Certains cas particulier sont faisables, mais le cas général semble déjà difficile.

Merci !