

Un exemple d'équations profinies

Laure Daviaud Charles Paperman
(remerciements à Olivier Carton et Jean-Eric Pin)

LIAFA, CNRS et Université Paris Diderot

FREC 2012, Bordeaux

- ① Un peu de profini...
- ② Equations profinies : définitions et propriétés
- ③ Le cas de u^*

Un monoïde M sépare deux mots u et v s'il existe un morphisme $\varphi : A^* \rightarrow M$ tel que $\varphi(u) \neq \varphi(v)$.

Un monoïde M sépare deux mots u et v s'il existe un morphisme $\varphi : A^* \rightarrow M$ tel que $\varphi(u) \neq \varphi(v)$.

On définit une distance sur A^* :

$$d(u, v) = 2^{-m}$$

où m est la taille du plus petit monoïde qui sépare u et v .

Un monoïde M sépare deux mots u et v s'il existe un morphisme $\varphi : A^* \rightarrow M$ tel que $\varphi(u) \neq \varphi(v)$.

On définit une distance sur A^* :

$$d(u, v) = 2^{-m}$$

où m est la taille du plus petit monoïde qui sépare u et v .

Définition

$\widehat{A^*}$ est le complété de A^* pour cette distance.

Propriété (Monoïde)

La concaténation est prolongeable par continuité sur $\widehat{A^}$. Muni de cette opération $\widehat{A^*}$ est un monoïde.*

Propriété (Compacité)

$\widehat{A^}$ est un espace topologique compact.*

Propriété (Universalité)

Pour tout monoïde fini M et tout morphisme $\varphi : A^ \rightarrow M$, il existe un unique morphisme continu $\widehat{\varphi} : \widehat{A^*} \rightarrow M$ coïncidant avec φ sur A^* .*

Deux exemples de mots profinis

- Le zéro ($|A| \geq 2$) (Reilly-Zang 2000, Almeida-Volkov 2003)
Soit u_0, u_1, \dots une énumération des mots de A^* .

$$v_0 = u_0, v_{n+1} = (v_n u_{n+1} v_n)^{(n+1)!}$$

- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. On note ρ_A sa limite dans $\widehat{A^*}$.
- Soit $\varphi : A^* \rightarrow M$: si M a un zéro alors $\widehat{\varphi}(\rho_A) = 0$.
- La puissance idempotente

$$u^\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} u^{n!}$$

- Soit $\varphi : A^* \rightarrow M$: $\widehat{\varphi}(u^\omega)$ est la puissance idempotente de $\widehat{\varphi}(u)$ dans M .

Deux exemples de mots profinis

- Le zéro ($|A| \geq 2$) (Reilly-Zang 2000, Almeida-Volkov 2003)
Soit u_0, u_1, \dots une énumération des mots de A^* .

$$v_0 = u_0, v_{n+1} = (v_n u_{n+1} v_n)^{(n+1)!}$$

- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. On note ρ_A sa limite dans $\widehat{A^*}$.
- Soit $\varphi : A^* \rightarrow M$: si M a un zéro alors $\widehat{\varphi}(\rho_A) = 0$.
- La puissance idempotente

$$u^\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} u^{n!}$$

- Soit $\varphi : A^* \rightarrow M$: $\widehat{\varphi}(u^\omega)$ est la puissance idempotente de $\widehat{\varphi}(u)$ dans M .

u, v mots profinis

Définition

Un langage L vérifie $u \rightarrow v$ si $u \in \bar{L}$ implique $v \in \bar{L}$.

Exemple : $a \in A$

$$\{w \rightarrow a \mid w \in A^*\}$$

Le langage vide vérifie ces équations.

Les langages contenant le mot a vérifient ces équations.

L vérifie $u \rightarrow v$ si $u \in \bar{L}$ implique $v \in \bar{L}$.

Treillis de langages : ensemble de langages reconnaissables contenant \emptyset et A^* et clos par intersection et union finies.

Propriété (Gehrke, Grigorieff, Pin 2008)

*Un ensemble de langages reconnaissables est un **treillis** si et seulement s'il peut être défini par un ensemble d'équations de la forme $u \rightarrow v$ avec $u, v \in \widehat{A}^*$.*

L vérifie $u \leftrightarrow v$ si $u \in \bar{L}$ si et seulement si $v \in \bar{L}$.

Algèbre booléenne : ensemble de langages reconnaissables contenant \emptyset et A^* , clos par intersection finie, union finie et complémentaire.

Propriété (Gehrke, Grigorieff, Pin 2008)

Un ensemble de langages reconnaissables est une algèbre booléenne si et seulement s'il peut être défini par un ensemble d'équations de la forme $u \leftrightarrow v$ avec $u, v \in \widehat{A^}$.*

L vérifie $u \leq v$ si pour tout w, z , $wvz \in \bar{L}$ implique $wuz \in \bar{L}$.

Soit $\varphi : A^* \rightarrow M$ le morphisme syntaxique de L .

L vérifie $u \leq v$ si et seulement si $\widehat{\varphi}(u) \leq \widehat{\varphi}(v)$.

Quotient : $u^{-1}L = \{v \mid uv \in L\}$ et $Lu^{-1} = \{v \mid vu \in L\}$.

Propriété (Gehrke, Grigorieff, Pin 2008)

*Un ensemble de langages reconnaissables est un **treillis clos par quotient** si et seulement s'il peut être défini par un ensemble d'équations de la forme $u \leq v$ avec $u, v \in \widehat{A}^*$.*

Et les deux en même temps...

L vérifie $u = v$ si pour tout $w, z, wvz \in \bar{L}$ si et seulement si $wuz \in \bar{L}$.

Soit $\varphi : A^* \rightarrow M$ le morphisme syntaxique de L .

L vérifie $u = v$ si et seulement si $\widehat{\varphi}(u) = \widehat{\varphi}(v)$.

Propriété (Gehrke, Grigorieff, Pin 2008)

Un ensemble de langages reconnaissables est une algèbre booléenne close par quotient si et seulement s'il peut être défini par un ensemble d'équations de la forme $u = v$ avec $u, v \in \widehat{A^}$.*

Exemple : $\{\rho_{Aw} = w\rho_A = \rho_A \mid w \in A^*\}$.

Cas de u^*

Propriété

Le treillis engendré par les langages de la forme u^* est défini par l'ensemble d'équations :

$$x \rightarrow x^\ell \text{ pour } \ell \geq 0 \quad (1)$$

$$x^\omega y^\omega = 0 \text{ pour } xy \neq yx \quad (2)$$

$$x^{\omega+1} \rightarrow x \quad (3)$$

$$x \leq 0 \quad (4)$$

Propriété

L'algèbre booléenne close par quotient engendrée par les langages de la forme u^ est définie par l'ensemble d'équations :*

$$x^l = x^{\omega+l} \text{ pour } l > 0 \quad (5)$$

$$x^\omega y^\omega = 0 \text{ pour } xy \neq yx \quad (6)$$

Propriété

L'algèbre booléenne engendrée par les langages de la forme u^ est définie par l'ensemble d'équations :*

$$x^\ell \leftrightarrow x^{\omega+\ell} \text{ pour } \ell > 0 \quad (7)$$

$$x^\omega y^\omega = 0 \text{ pour } xy \neq yx \quad (8)$$

$$x^\alpha \leftrightarrow x^\beta \text{ pour } (\alpha, \beta) \in \Gamma \quad (9)$$