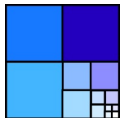


Prédicats Modulaires et produit semidirect par **MOD**

Luc Dartois,
travail conjoint avec Charles Paperman

FRec, Mai 2013



université
PARIS
PARIS 7
DIDEROT



Prédicats Modulaires et produit semidirect par **MOD**

Luc Dartois,
travail conjoint avec Charles Paperman

FRec, Mai 2013

Introduction

Problématique

Prédicats modulaires

Caractérisation algébrique des prédicats modulaires

Caractérisation algébrique des prédicats modulaires

Catégorie Dérivée

Un candidat: l'indice de stabilité

Cas des variétés locales

Un théorème de délai

Un exemple non local

Autre cas pour un théorème de délai

Variété suffisamment expressive

Conclusion

Problématique

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment de logique et L un langage régulier de mots finis.

► Définissabilité

Existe-t-il une formule φ de $\mathcal{F}[\sigma]$ telle que $L = L(\varphi)$?

Problématique

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment de logique et L un langage régulier de mots finis.

- ▶ Définissabilité

Existe-t-il une formule φ de $\mathcal{F}[\sigma]$ telle que $L = L(\varphi)$?

- ▶ Question

La décidabilité de $\mathcal{F}[\sigma]$ implique-t-elle la décidabilité de $\mathcal{F}[\sigma, \text{MOD}]$?

Prédicats modulaires

Prédicats modulaires

$MOD_i^d(x)$, prédicats unaires vrais aux positions égales à $i \bmod d$.
MOD est l'ensemble de tous les prédicats MOD_i^d , pour $d > 1$ et $i < d$.

Prédicats modulaires

Prédicats modulaires

$MOD_i^d(x)$, prédicats unaires vrais aux positions égales à $i \bmod d$.
MOD est l'ensemble de tous les prédicats MOD_i^d , pour $d > 1$ et $i < d$.

Exemple

$\psi \equiv \exists x (a(x) \wedge MOD_0^3(x))$.

$L(\psi) = (A^3)^* aA^*$.

Prédicats modulaires

Prédicats modulaires

$MOD_i^d(x)$, prédicats unaires vrais aux positions égales à $i \bmod d$.
MOD est l'ensemble de tous les prédicats MOD_i^d , pour $d > 1$ et $i < d$.

Exemple

$$\psi \equiv \exists x (a(x) \wedge MOD_0^3(x)).$$

$$L(\psi) = (A^3)^* aA^*.$$

Deuxième exemple

$$\varphi \equiv \exists x (a(x) \wedge MOD_0^3(x) \wedge MOD_1^2(x)).$$

$$L(\varphi) = (A^6)^* A^3 aA^*.$$

Prédicats modulaires

Prédicats modulaires

$MOD_i^d(x)$, prédicats unaires vrais aux positions égales à $i \bmod d$.
MOD est l'ensemble de tous les prédicats MOD_i^d , pour $d > 1$ et $i < d$.

Exemple

$$\psi \equiv \exists x (a(x) \wedge MOD_0^3(x)).$$

$$L(\psi) = (A^3)^* aA^*.$$

Deuxième exemple

$$\varphi \equiv \exists x (a(x) \wedge MOD_0^3(x) \wedge MOD_1^2(x)) \equiv \exists x (a(x) \wedge MOD_3^6(x)).$$

$$L(\varphi) = (A^6)^* A^3 aA^*.$$

La *lm*-variété MOD

Définition

Soit A un alphabet, un langage est dans la **variété de langages** $MOD(A^*)$ ssi il est combinaison booléenne de langages $(A^n)^* A^i$, avec $n > i \geq 0$.

MOD

Un morphisme π est dans la ***lm*-variété MOD** ssi il est de la forme $\pi : A^* \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où pour toutes lettres a, b , $\pi_n(a) = \pi_n(b)$.

Introduction

Problématique

Prédicats modulaires

Caractérisation algébrique des prédicats modulaires

Caractérisation algébrique des prédicats modulaires

Catégorie Dérivée

Un candidat: l'indice de stabilité

Cas des variétés locales

Un théorème de délai

Un exemple non local

Autre cas pour un théorème de délai

Variété suffisamment expressive

Conclusion

Caractérisation algébrique des prédicats modulaires

Théorème

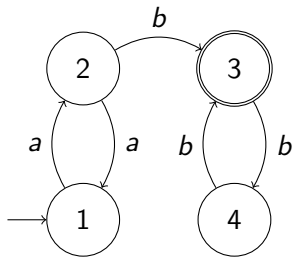
Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment de logique et \mathbf{V} la variété de monoïdes associée.

Alors pour tout langage régulier L , les propositions suivantes sont équivalentes:

1. L est définissable dans $\mathcal{F}[\sigma, \text{MOD}]$
2. L appartient à $\mathbf{V} * \mathbf{MOD}$
3. Il existe un entier d tel que la d -catégorie dérivée de L est dans $g\mathbf{V}$.

Catégorie dérivée par l'exemple

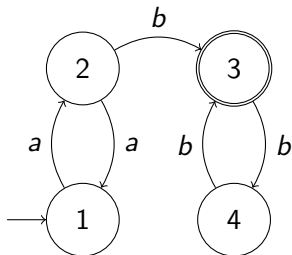
Soit $L = (aa)^* ab(bb)^*$.



Automate minimal de L

Catégorie dérivée par l'exemple

Soit $L = (aa)^* ab(bb)^*$.



1*

a, aa^*

b, bb^*

ab	aab
aab	$aabb$

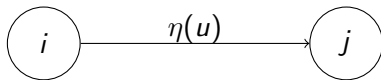
0*

Automate minimal et monoïde syntaxique de L

Catégorie dérivée par l'exemple

Soit $L = (aa)^* ab(bb)^*$.

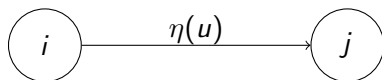
Soit u un mot tel que $i + |u| \equiv j \pmod{d}$.



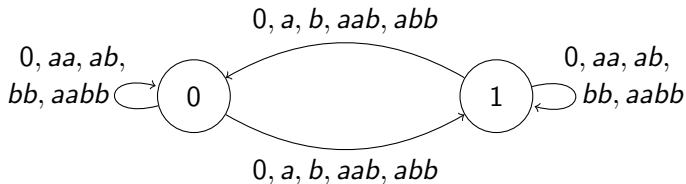
Catégorie dérivée par l'exemple

Soit $L = (aa)^* ab(bb)^*$.

Soit u un mot tel que $|u| + i \equiv j \pmod{d}$.



$M_L = \{0, 1, a, b, aa, ab, bb, aab, abb, aabb\}$



2-catégorie dérivée $C_2(L)$

Retour sur la caractérisation

Théorème

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment de logique et \mathbf{V} la variété de monoïde associée. On veut, pour tout langage régulier L , pouvoir décider: Existe-t-il un entier d tel que $C_d(L)$ est dans $g\mathbf{V}$?

Retour sur la caractérisation

Théorème

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment de logique et \mathbf{V} la variété de monoïde associée. On veut, pour tout langage régulier L , pouvoir décider: Existe-t-il un entier d tel que $C_d(L)$ est dans $g\mathbf{V}$?

Définition

Une catégorie appartient à la **variété de catégories $g\mathbf{V}$** ssi elle divise un monoïde de \mathbf{V} , vue comme une catégorie à un élément.

Retour sur la caractérisation

Théorème

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment de logique et \mathbf{V} la variété de monoïde associée. On veut, pour tout langage régulier L , pouvoir décider: Existe-t-il un entier d tel que $C_d(L)$ est dans $g\mathbf{V}$?

Définition

Une catégorie appartient à la **variété de catégories $g\mathbf{V}$** ssi elle divise un monoïde de \mathbf{V} , vue comme une catégorie à un élément.

Un problème à deux facettes

- ▶ Décision d'un entier d adapté (théorème de délai)
- ▶ Décidabilité de $g\mathbf{V}$.

Restriction à un entier d

Théorème

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment de logique et \mathbf{V} la variété de monoïdes associée. Alors pour tout entier d positif et tout langage régulier L , les propositions suivantes sont équivalentes:

1. L est définissable dans $\mathcal{F}[\sigma, \text{MOD}_d]$
2. L appartient à $\mathbf{V} * \mathbf{MOD}_d$
3. La d -catégorie dérivée $C_d(L)$ est dans $g\mathbf{V}$.

Restriction à un entier d

Théorème

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment de logique et \mathbf{V} la variété de monoïdes associée. Alors pour tout entier d positif et tout langage régulier L , les propositions suivantes sont équivalentes:

1. L est définissable dans $\mathcal{F}[\sigma, \text{MOD}_d]$
2. L appartient à $\mathbf{V} * \mathbf{MOD}_d$
3. La d -catégorie dérivée $C_d(L)$ est dans $g\mathbf{V}$.

Indice de délai

Étant donné une variété \mathbf{V} , l'indice de délai d'un langage est un entier calculable d_L tel que

L est dans $\mathbf{V} * \mathbf{MOD}$ ssi L est dans $\mathbf{V} * \mathbf{MOD}_{d_L}$.

Restriction à un entier d

Théorème

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment de logique et \mathbf{V} la variété de monoïdes associée. Alors pour tout entier d positif et tout langage régulier L , les propositions suivantes sont équivalentes:

1. L est définissable dans $\mathcal{F}[\sigma, \text{MOD}_d]$
2. L appartient à $\mathbf{V} * \mathbf{MOD}_d$
3. La d -catégorie dérivée $C_d(L)$ est dans $g\mathbf{V}$.

Indice de délai

Étant donné une variété \mathbf{V} , l'indice de délai d'un langage est un entier calculable d_L tel que

L est dans $\mathbf{V} * \mathbf{MOD}$ ssi L est dans $\mathbf{V} * \mathbf{MOD}_{d_L}$.

Théorème de délai ?

Existe-t-il un indice de délai universel?

Introduction

Problématique

Prédicats modulaires

Caractérisation algébrique des prédicats modulaires

Caractérisation algébrique des prédicats modulaires

Catégorie Dérivée

Un candidat: l'indice de stabilité

Cas des variétés locales

Un théorème de délai

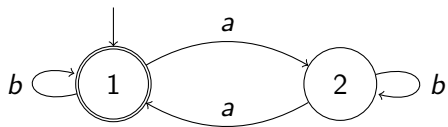
Un exemple non local

Autre cas pour un théorème de délai

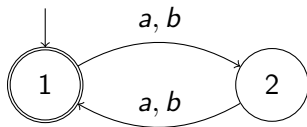
Variété suffisamment expressive

Conclusion

Automate 2-itéré

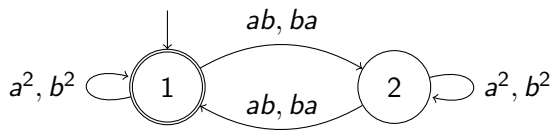


Langage parité, monoïde syntaxique $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$



Langage $(A^2)^*$, monoïde syntaxique $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Automate 2-itéré



Langage parité, monoïde 2-itéré $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$



Langage $(A^2)^*$, monoïde 2-itéré trivial

Semigroupe stable

Indice de stabilité (Straubing 94)

Pour tout dfa, il existe un plus petit entier s tel que les automates s -itéré et $2s$ -itéré soient isomorphes.

Semigroupe stable

Indice de stabilité (Straubing 94)

Pour tout dfa, il existe un plus petit entier s tel que les automates s -itéré et $2s$ -itéré soient isomorphes.

Semigroupe stable

Soit L un langage régulier d'indice de stabilité s .

Son semigroupe stable est le semigroupe de transitions de $\mathcal{A}_s(L)$.

Alternativement, il s'agit du sous-semigroupe $\eta(A^s)$.

Introduction

Problématique

Prédicats modulaires

Caractérisation algébrique des prédicats modulaires

Caractérisation algébrique des prédicats modulaires

Catégorie Dérivée

Un candidat: l'indice de stabilité

Cas des variétés locales

Un théorème de délai

Un exemple non local

Autre cas pour un théorème de délai

Variété suffisamment expressive

Conclusion

Variété locale

Définition

Une catégorie appartient à la variété de catégorie $\ell\mathbf{V}$ ssi chacun de ses monoïdes locaux appartient à \mathbf{V} .

Variété locale

Définition

Une catégorie appartient à la variété de catégorie $\ell\mathbf{V}$ ssi chacun de ses monoïdes locaux appartient à \mathbf{V} .

Variété locale

Une variété de monoïde est **locale** ssi $g\mathbf{V} = \ell\mathbf{V}$.

Variété locale

Définition

Une catégorie appartient à la variété de catégorie $\ell\mathbf{V}$ ssi chacun de ses monoïdes locaux appartient à \mathbf{V} .

Variété locale

Une variété de monoïde est **locale** ssi $g\mathbf{V} = \ell\mathbf{V}$.

Propriété

Soit \mathbf{V} une variété locale.

Si \mathbf{V} est décidable, alors $g\mathbf{V}$ est décidable.

Un théorème de délai pour les variétés locales

Soit \mathbf{V} une variété locale, L un langage régulier d'indice de stabilité s et d un entier.

Lemme

$C_d(L)$ appartient à $g\mathbf{V} \Rightarrow C_{ds}(L)$ est dans $g\mathbf{V}$.

Un théorème de délai pour les variétés locales

Soit \mathbf{V} une variété locale, L un langage régulier d'indice de stabilité s et d un entier.

Lemme

$C_d(L)$ appartient à $g\mathbf{V} \Rightarrow C_{ds}(L)$ est dans $g\mathbf{V}$.

Idées de preuve:

$$\eta(A^{ds}) \subseteq \eta(A^d)$$

Point de vue logique: MOD_{ds} est plus expressif que MOD_d .

Un théorème de délai pour les variétés locales

Soit \mathbf{V} une variété locale, L un langage régulier d'indice de stabilité s et d un entier.

Lemme

$C_d(L)$ appartient à $g\mathbf{V} \Rightarrow C_{ds}(L)$ est dans $g\mathbf{V}$.

Lemme

$C_s(L)$ appartient à $\ell\mathbf{V} \Leftrightarrow C_{ds}(L)$ est dans $\ell\mathbf{V}$.

Un théorème de délai pour les variétés locales

Soit \mathbf{V} une variété locale, L un langage régulier d'indice de stabilité s et d un entier.

Lemme

$C_d(L)$ appartient à $g\mathbf{V} \Rightarrow C_{ds}(L)$ est dans $g\mathbf{V}$.

Lemme

$C_s(L)$ appartient à $\ell\mathbf{V} \Leftrightarrow C_{ds}(L)$ est dans $\ell\mathbf{V}$.

Idée de preuve:

Par définition du semigroupe stable: $\eta(A^{ds}) = \eta(A^s)$.

Un théorème de délai pour les variétés locales

Soit \mathbf{V} une variété locale, L un langage régulier d'indice de stabilité s et d un entier.

Lemme

$C_d(L)$ appartient à $g\mathbf{V} \Rightarrow C_{ds}(L)$ est dans $g\mathbf{V}$.

Lemme

$C_s(L)$ appartient à $\ell\mathbf{V} \Leftrightarrow C_{ds}(L)$ est dans $\ell\mathbf{V}$.

Théorème

$L \in \mathbf{V} * \mathbf{MOD} \Leftrightarrow L \in \mathbf{V} * \mathbf{MOD}_s \Leftrightarrow L \in \mathbf{QV}$.

Corollaire

Si \mathbf{V} est une variété locale décidable, alors $\mathbf{V} * \mathbf{MOD}$ est décidable.

Exemple non local: J

Reprenons $L = (aa)^* ab(bb)^*$, d'indice de stabilité 4.

$M_L = \{0, 1, a, b, aa, ab, bb, aab, abb, aabb\}$.

aa^*

bb^*

ab

$aabb$

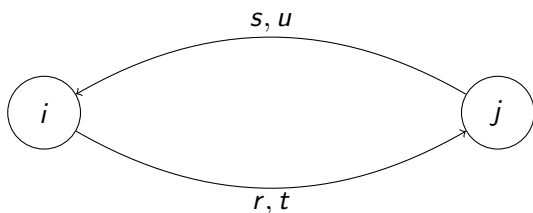
0

Semigroupe stable de L

Exemple non local: **J**

Reprenons $L = (aa)^* ab(bb)^*$, d'indice de stabilité 4.

$M_L = \{0, 1, a, b, aa, ab, bb, aab, abb, aabb\}$.



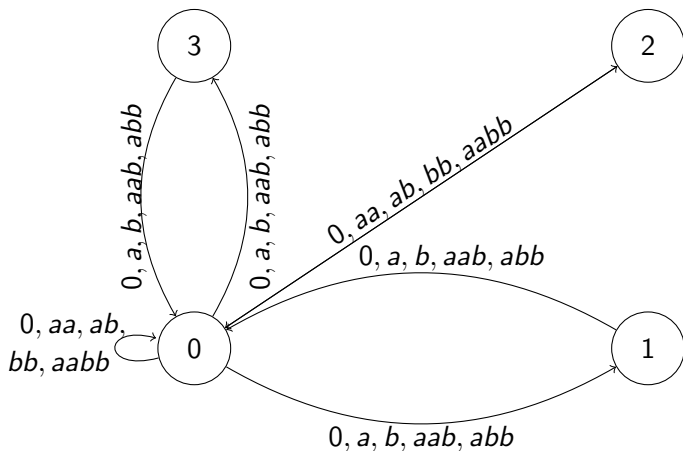
$$(rs)^\omega (tu)^\omega = (rs)^\omega ru (tu)^\omega$$

Équation de Knast pour **gJ**

Exemple non local: J

Reprenons $L = (aa)^* ab(bb)^*$, d'indice de stabilité 4.

$M_L = \{0, 1, a, b, aa, ab, bb, aab, abb, aabb\}$.

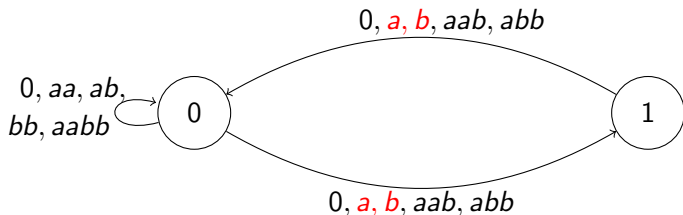


4-catégorie dérivée $C_4(L)$

Exemple non local: J

Reprenons $L = (aa)^* ab(bb)^*$, d'indice de stabilité 4.

$M_L = \{0, 1, a, b, aa, ab, bb, aab, abb, aabb\}$.



$$(aa)^\omega (bb)^\omega = aabb \neq (aa)^\omega ab(bb)^\omega = ab$$

Introduction

Problématique

Prédicats modulaires

Caractérisation algébrique des prédicats modulaires

Caractérisation algébrique des prédicats modulaires

Catégorie Dérivée

Un candidat: l'indice de stabilité

Cas des variétés locales

Un théorème de délai

Un exemple non local

Autre cas pour un théorème de délai

Variété suffisamment expressive

Conclusion

Cas des variétés contenant $(ab)^*$, A^*a , aA^*

Théorème

Soit \mathbf{V} une variété décidable telle que aA^* , $A^*a \in \mathbf{V}(A^*)$, et L un langage régulier.

Alors $L \in \mathbf{V} * \mathbf{MOD} \Leftrightarrow \mathbf{V} * \mathbf{MOD}_{s_L}$.

Cas des variétés contenant $(ab)^*$, A^*a , aA^*

Théorème

Soit \mathbf{V} une variété décidable telle que aA^* , $A^*a \in \mathbf{V}(A^*)$, et L un langage régulier.

Alors $L \in \mathbf{V} * \mathbf{MOD} \Leftrightarrow \mathbf{V} * \mathbf{MOD}_{s_L}$.

Théorème

Soit \mathbf{V} une variété décidable telle que aA^* , A^*a , $(ab)^* \in \mathbf{V}(A^*)$, et L un langage régulier.

Alors la variété $g\mathbf{V}$ est décidable.

Conclusion

Au final, nous avons obtenu:

- ▶ Une caractérisation algébrique non effective
- ▶ Un théorème de délai et de décidabilité dans de nombreux cas:
 - ▶ Variétés locales,
 - ▶ Variétés contenant les prédicats locaux,
 - ▶ D'autres variétés (**ACOM**, \mathbf{J}^+ , \mathbf{J}).

Conclusion

Au final, nous avons obtenu:

- ▶ Une caractérisation algébrique non effective
- ▶ Un théorème de délai et de décidabilité dans de nombreux cas:
 - ▶ Variétés locales,
 - ▶ Variétés contenant les prédicats locaux,
 - ▶ D'autres variétés (**ACOM**, \mathbf{J}^+ , \mathbf{J}).

Mais il manque un résultat général.

Est-il vrai?

La variété engendrée par $(ab)^*$ est-elle un contre exemple?