

Exemples d'équations profinies

Laure Daviaud Charles Paperman

LIAFA, CNRS et Université Paris Diderot

Réunion FREC, Mai 2011

Introduction

- Correspondance théorique entre ensembles d'équations et classes de langages

$x \rightarrow y$	treillis.
$x \leftrightarrow y$	algèbre booléenne
$x \leq y$	treillis clos par quotient
$x = y$	algèbre booléenne close par quotient

- Recherche d'un ensemble d'équations le plus simple possible décrivant une classe de langage

Partie I : Autour des langages de la forme $FA^*G \cup H$, pour F , G et H finis :

- le treillis engendré par les uA^*
- le treillis engendré par les uA^* et A^*v
- le treillis engendré par les uA^* et les langages cofinis

Partie II : Deux autres exemples :

- les codes préfixes rationnels
- le treillis engendré par les u^*

Partie I : Autour des langages de la forme $FA^*G \cup H$, pour F , G et H finis :

- le treillis engendré par les uA^*
- le treillis engendré par les uA^* et A^*v
- le treillis engendré par les uA^* et les langages cofinis

Partie II : Deux autres exemples :

- les codes préfixes rationnels
- le treillis engendré par les u^*

Partie I : Autour des langages de la forme $FA^*G \cup H$, pour F , G et H finis :

- le treillis engendré par les uA^*
- le treillis engendré par les uA^* et A^*v
- le treillis engendré par les uA^* et les langages cofinis

Partie II : Deux autres exemples :

- les codes préfixes rationnels
- le treillis engendré par les u^*

Partie I :

Autour des langages de la forme $FA^*G \cup H$
pour F , G et H finis

$$FA^* \cup G, FA^*G \cup H$$

Proposition

- *L'ensemble des langages de la forme $FA^* \cup G^1$ (resp. $FA^*G \cup H^2$) où F, G et H sont finis est une algèbre booléenne close par quotient.*
- *Elle est définie par l'ensemble d'équations :*
 $\{ x^\omega y = x^\omega \text{ pour } x \neq 1 \}$
(resp. $\{ x^\omega y x^\omega = x^\omega \text{ pour } x \neq 1 \}$).

1. M. Perles, M.O. Rabin and E. Shamir, The theory of definite automata, IEEE. Trans. Electron. Comput. 12, (1963), 233-243.

2. D. Perrin, Sur certains semigroupes syntactiques, Séminaires de l'IRIA, Logiques et Automates, Paris (1971), 169-177.

Proposition

Le treillis engendré par les langages de la forme uA^ est défini par l'ensemble d'équations :*

$$\{x^\omega y = x^\omega \text{ pour } x \neq 1, x \rightarrow xy\}.$$

Remarque : L'algèbre booléenne engendrée par uA^* est l'ensemble des $FA^* \cup G$.

Proposition

Le treillis engendré par les langages de la forme uA^ et A^*v est défini par l'ensemble d'équations :*

$$\{ x^\omega y x^\omega = x^\omega \text{ pour } x \neq 1, x \rightarrow y \text{ pour } y \in xA^* \cap A^*x \}.$$

Remarque : L'algèbre booléenne engendrée par uA^* et A^*v est l'ensemble des $FA^*G \cup H$.

Proposition

Le treillis engendré par les langages de la forme uA^ et les langages cofinis est défini par l'ensemble d'équations :*

$\{ (1) x^\omega y = x^\omega \text{ pour } x \neq 1, (2) x \rightarrow xzy^\omega \text{ pour } y \neq 1 \}$.

Remarque : L'algèbre booléenne engendrée par uA^* et les cofinis est celle engendrée par les $FA^* \cup G$.

uA^* et les langages cofinis : idée de preuve

{ (1) $x^\omega y = x^\omega$ pour $x \neq 1$, (2) $x \rightarrow xzy^\omega$ pour $y \neq 1$ }

1. uA^* et les langages cofinis vérifient les équations.
2. Réciproquement, soit L rationnel vérifiant les équations et M son monoïde syntaxique. :

▶ (1) $\Rightarrow L = FA^* \cup G$ avec F et G finis.

▶ Soit $x \in G$ on a :

$$L = FA^* \cup (G \setminus \{x\}) \cup (xA^* \cap (A^{\geq |x|+|M|} \cup \{x\}))$$

Si $|z| \geq |M|$ alors : $\exists z_1, z_2, z_3$ tels que $z_1 z_2 z_3 = z$

$$\eta(z_1) = \eta(z_1)\eta(z_2)$$

$$\begin{aligned}\eta(xz) &= \eta(x)\eta(z_1)\eta(z_2)\eta(z_3) \\ &= \eta(x)\eta(z_1)\eta(z_2)^\omega\eta(z_3)\end{aligned}$$

Partie II :

Deux autres exemples

Définition

Un ensemble L de mots non vides est un code préfixe si aucun mot de L n'est préfixe strict d'un autre mot de L

Proposition

Le treillis engendré par les codes préfixes rationnels est défini par l'ensemble d'équations :

$$\{ux^\omega \rightarrow y \text{ pour } x, u, y \in \hat{A}^*, x \neq 1\}.$$

Proposition

Le treillis engendré par les langages de la forme u^ est défini par l'ensemble d'équations :*

{ (1) $x \rightarrow x^n$ pour $n \geq 0$, (2) $x^\omega y^\omega = 0$ pour $xy \neq yx$, (3) $x^{\omega+1} \rightarrow x$, (4) $x \leq 0$ }.

u^* : idée de preuve

$$\{ (1) x \rightarrow x^n \text{ pour } n \geq 0, (2) x^\omega y^\omega = 0 \text{ pour } xy \neq yx, \\ (3) x^{\omega+1} \rightarrow x, (4) x \leq 0 \}$$

1. u^* vérifie les équations.

2. Réciproquement, si L est rationnel et vérifie les équations :

$$(1) \Rightarrow L = \bigcup_{u \in L} u^*.$$

→ montrons que cette union est finie.

Sinon, on a une suite infinie $(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \in L^{\mathbb{N}}$ telle que :

- ▶ $\forall i u_i \notin \bigcup_{j < i} u_j^*$. On choisit u_i minimal pour l'ordre shortlex satisfaisant cette propriété.

u^* : idée de preuve

{ (1) $x \rightarrow x^n$ pour $n \geq 0$, (2) $x^\omega y^\omega = 0$ pour $xy \neq yx$,
(3) $x^{\omega+1} \rightarrow x$, (4) $x \leq 0$ }

$\forall i u_i \notin \bigcup_{j < i} u_j^*$. On choisit u_i minimal pour l'ordre shortlex

satisfaisant cette propriété.

On considère $i < j$ minimaux tels que $\eta(u_i) = \eta(u_j)$.

premier cas : $u_i u_j \neq u_j u_i$

$$\begin{aligned}\eta(u_i)^\omega &= \eta(u_i)^{2\omega} \\ &= \eta(u_i^\omega u_j^\omega) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$(4) \Rightarrow L = A^*$$

u^* : idée de preuve

- { (1) $x \rightarrow x^n$ pour $n \geq 0$, (2) $x^\omega y^\omega = 0$ pour $xy \neq yx$,
(3) $x^{\omega+1} \rightarrow x$, (4) $x \leq 0$ }

deuxième cas : $u_i u_j = u_j u_i$

$u_i = u^k$ et $u_j = u^l$ avec $k < l$.

On montre que $u^d \in L$ où $d = \text{pgcd}(k, l)$:

$$\begin{aligned}\eta(u^{d(\omega+1)}) &= \eta(u^d)^\omega \eta(u^d) \\ &= \eta(u^k)^\omega \eta(u^l)^\omega \eta(u^{ak+bl}) \\ &= \eta(u_i^{a'} u_j^{b'}) \in \eta(L)\end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow u^d \in L$, contradiction avec la minimalité de u_i